**Ułamki zwykłe**

[Arytmetyka – szkoła podstawowa – średnio-łatwe – bardzo przydatne]

Ułamki – inne przedstawienie dzielenia

Każde dzielenie można zastąpić ułamkiem. Wystarczy zamiast znaku dzielenia (:) użyć **kreski ułamkowej** (poziomej linii). Dzielną zapisujemy wtedy nad kreską, a dzielnik pod nią. Oto przykłady:

12:3 =

45:9 =

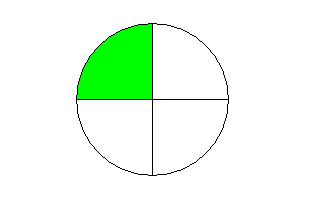
17:5 =

6778:377 =

To, co znajduje się ponad kreską ułamkową nazywamy **licznikiem** ułamka, a to, co pod nią – **mianownikiem** ułamka. Tak więc w ułamku (czyt. pięćdziesiąt sześć trzydziestych czwartych) licznikiem jest 56, a mianownikiem 34. (określenia: dzielna i licznik oraz dzielnik i mianownik odnoszą się do tych samych liczb)

Ułamek jako część całości

Ułamek to po prostu inne przedstawienie dzielenia. Jednak jego inne znaczenie to część całości. Ułamek (czyt. jedna czwarta) może oznaczać, że mając dany jakiś przedmiot (ciasto, sznurek, pręt, deskę) dzielimy go na cztery równe części i zabieramy jedną. Wyobraźmy sobie tort. Kroimy go na cztery kawałki tej samej wielkości. Wtedy każdy otrzymany kawałek stanowi jedną czwartą całego tortu.



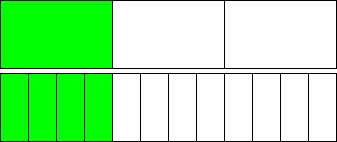
Zgodnie z tym zamalowany na zielono kawałek to tortu. Pozostałe trzy kawałki to trzy czwarte () całego tortu (po podzieleniu go na cztery równe części zabieramy trzy). Rozumując w podobny sposób, mając drewnianą, podłużną deskę, dzielimy ją na 12 równych części – wtedy każda z nich stanowi jedną dwunastą () początkowej deski. Gdy zabierzemy cztery takie kawałki, będziemy mieli cztery dwunaste () deski:



Tę samą deskę podzielmy na trzy równe części:



Porównajmy teraz deski i tej deski:



Można stwierdzić, że:

Takiego rodzaju równość dotyczy wszystkich ułamków, nie tylko odnoszących się do deski. Z ułamka można stworzyć mnożąc licznik oraz mianownik tego ułamka przez cztery (14=4, 34=12). Gdybyśmy wykonali działanie: 12:4 otrzymalibyśmy 3. Toteż wykonując działanie 4:12 otrzymujemy 1:3. Przekształcenia tego rodzaju można wykonywać na każdym ułamku. Zatem:

Rodzaje ułamków zwykłych

**Ułamek nieskracalny** jest to ułamek zapisany w najprostszej postaci, to znaczy taki, w którym licznik i mianownik nie posiadają wspólnego dzielnika (czyli nie istnieje liczba, przez którą możemy podzielić zarówno licznik, jak i mianownik). Przykłady ułamków nieskracalnych: , , , , .

Skracanie ułamków:

= Zarówno 20, jak i 45 dzielą się przez 5. Jest to ich największy wspólny dzielnik

= 78 i 4 można podzielić maksymalnie przez 2

= 24 i 60 dzielą się także przez 3 lub 4, lecz ich największy wspólny dzielnik wynosi 12

**Ułamek właściwy** to taki ułamek, w którym licznik jest mniejszy niż mianownik. Przykłady ułamków właściwych: , , , . Wtedy właśnie o ułamku można mówić jako o części. **Ułamek niewłaściwy** zaś posiada licznik większy od mianownika. Przykłady ułamków niewłaściwych: , , , . Ułamek niewłaściwy, mimo swojej nazwy, nie jest zapisany matematycznie niepoprawnie.

Aby zamienić ułamek niewłaściwy na ułamek właściwy należy podzielić licznik ułamka niewłaściwego przez jego mianownik. Zazwyczaj otrzymamy wtedy liczbę oraz resztę dzielenia. Liczbę tę zapisujemy, a obok niej piszemy ułamek o liczniku równym reszcie z dzielenia i o mianowniku równym mianownikowi ułamka niewłaściwego. Taki zestaw traktuje się jako jedną liczbę i nazywa **liczbą mieszaną**. Cała ta operacja nazywa się **wyłączaniem całości z ułamka** (z ułamka wyciągamy pełne liczby – całości). Analogicznie operacją odwrotną jest włączanie całości do ułamka (tworzymy wtedy ułamek niewłaściwy z liczby mieszanej). Oto przykłady:

=1 w 9 piątka mieści się 1 raz. Pozostaje 4.

=5=5 w 135 dwadzieścia cztery mieści się 5 razy. Pozostaje , które można doprowadzić do postaci nieskracalnej.

=23 161 dzieli się przez 7 bez reszty

Ułamek jest to specyficzna liczba, która w matematyce pojawia się bardzo często. Ułamek można rozpatrywać na trzy sposoby:

* Jako liczbę – każdy ułamek jest liczbą tak samo jak 3, 71 czy 2869
* Jako działanie – ułamek to inne przedstawienie dzielenia
* Jako część całości

Działania na ułamkach

Dodawanie ułamków, które maja takie same mianowniki, jest bardzo proste. Wystarczy dodać wtedy ich liczniki, a mianownik pozostawić niezmieniony. Przykładowo: mamy sznurka i tego samego sznurka. Po ich złączeniu powstaje początkowego sznurka: .

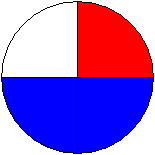
Czerwonym kolorem zaznaczono jedną piątą sznurka, a niebieskim dwie piąte sznurka. Suma długości czerwonego i niebieskiego Szurka wynosi trzy piąte całego sznurka.

Przykłady dodawania ułamków o jednakowych mianownikach:

Jednak bardzo często dodawane ułamki mają różne mianowniki. Wtedy, aby móc wykonać działanie, należy sprowadzić je do wspólnego mianownika, czyli zamienić dodawane ułamki, na ułamki, które posiadają takie same mianowniki. Należy więc pomnożyć licznik i mianownik jednego z ułamków (lub obu ułamków) przez takie liczby, aby mianowniki tych ułamków były równe. Chcąc dodać ułamki i , musimy stworzyć z ułamka taki ułamek, którego mianownik będzie wynosił 4. Skoro =, to

W ten sposób otrzymujemy dodawanie ułamków o tych samych mianownikach. Możemy je wykonać bez problemu.

Działanie to można przedstawić na bazie tortu:



Niebieska część stanowi połowę () tortu, a czerwona – jedną czwartą tortu. Ich suma wynosi trzy czwarte tortu.

Dodajmy teraz ułamki i . W tym przypadku należy zamienić oba ułamki. Zazwyczaj w takim przypadku licznik i mianownik pierwszego ułamka należy pomnożyć przez mianownik drugiego ułamka, a licznik i mianownik drugiego przez mianownik pierwszego ułamka. Zatem:

Przykłady dodawania ułamków o różnych mianownikach:

Odejmowanie jest działaniem odwrotnym do dodawania, więc rządzą nim te same zasady. Odejmowanie ułamków o tych samych mianownikach wykonuje się dokładnie tak samo, jak dodawanie. W przypadku odejmowania ułamków o różnych mianownikach, też trzeba je sprowadzić do wspólnego mianownika.

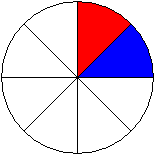
Przykłady odejmowania ułamków:

Mnożenie ułamków przez zwykłe liczby nie jest skomplikowane. Wystarczy pomnożyć licznik ułamka przez tę liczbę. Przykładowo . Można to uzasadnić korzystając z definicji mnożenia: jest to dodawanie takich samych czynników. Dodając do siebie pięciokrotnie otrzymamy ().

Przykłady mnożenia ułamków przez pełne liczby:

Powyższy przykład to szczególny przypadek mnożenia tego rodzaju. Ponieważ mnożenie i dzielenie są działaniami odwrotnymi, mogą się wzajemnie **znieść**. Oznacza to, że gdy dowolną liczbę pomnożymy, a następnie podzielimy (lub na odwrót) przez daną liczbę, to wynikiem będzie wyjściowa liczba, a mnożenie z dzieleniem unieważnią się nawzajem.

Mnożenie kilku ułamków polega na tym, że liczniki ułamków, na których wykonujemy to działanie, mnożymy, ich mianowniki również. Przykładowo: . Liczniki ułamków pomnożyliśmy (11=1), ich mianowniki również (42=8). Wynika to z tego, że jeśli weźmiemy połowę (jedną drugą) z jednej czwartej to otrzymamy jedną ósmą (jeśli weźmiemy ćwierć z połowy, wynik będzie oczywiście ten sam). Mnożenie przez jest równoważne z dzieleniem przez dwa, zatem można także powiedzieć, że dzielona przez dwa jest równa . To również można przedstawić na bazie tortu:



Czerwony z niebieskim kawałkiem tworzą jedną czwartą całego tortu. Zarówno czerwony, jak i niebieski samodzielnie stanowią jedną drugą jednej czwartej, lecz także jedną ósmą całości.

Przykłady mnożenia ułamków:

Bardzo często podczas mnożenia ułamków możemy je ze sobą skrócić, tak, jak w przypadku tworzenia ułamków nieskracalnych. W mnożeniu jednak, oprócz możliwości skrócenia pojedynczego ułamka, możemy skracać ze sobą liczniki i mianowniki różnych ułamków. Jest to bardzo przydatne, gdyż upraszcza zapis i ułatwia wykonanie działania. Oto przykłady:

skrócono tu 15 z 45 oraz 17 z 85.

najpierw zostały skrócone 28 z 14 i 30 z 5, później otrzymane 6 z 6.

Wiedząc, jak mnoży się ułamki, można uzasadnić równość typu

Otóż wiedząc, że 1 jest elementem neutralnym mnożenia i nie ma wpływu na wynik, można stwierdzić, że

Jednocześnie przyjmując, że , to

A zatem

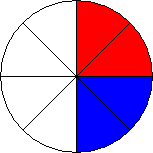
Więc

Tego typu dowód można stosować do każdego ułamka, z którego chcemy zrobić dowolny inny ułamek.

Dzielenie ułamków przez pełne liczby wykonuje się również tak, jak mnożenie – licznik dzielonego ułamka dzielimy przez daną liczbę.

Skoro dzielenie przez 2 jest równoważne z mnożeniem przez , to powyższy przykład można zapisać jako

Tu znów można posłużyć się tortem:



Kolorowa część tortu stanowi jego połowę. Niebieska (lub czerwona) część to połowa dzielona na dwa oraz jedna czwarta całości. Zazwyczaj aby wykonać dzielenie ułamka łatwiej jest zamienić je na mnożenie.

Przykłady dzielenia ułamków przez pełne liczby:

Zamieniając w powyższych przykładach pełne liczby na ułamki, tworzyliśmy liczby, w których licznik i mianownik zostały zamienione miejscami (2 to inaczej ). Powstały w ten sposób ułamek jest **liczbą odwrotną** do wyjściowej liczby. Wynik pozostał niezmienny, ponieważ oprócz odwrócenia liczby, działanie zamieniliśmy na odwrotne (z dzielenia na mnożenie).

Aby podzielić dwa ułamki, dzielenie musimy zamienić na mnożenie. Jednocześnie z ułamka, przez który dzielimy, musimy stworzyć liczbę do niego odwrotną. Dzielenie zamieniamy na mnożenie: . W taki sposób wykonujemy każde dzielenie (jeśli się zastanowić, w ten sposób dzielić można nie tylko ułamki).

Przykłady dzielenia ułamków:

Czasami pisząc bardziej rozbudowane działania możemy spotkać się z **ułamkiem piętrowym**. Jest to taki ułamek, w którym w liczniku bądź mianowniku (lub obu naraz) znajduje się ułamek. Przykłady ułamków piętrowych: , , . Podczas upraszczania ułamków piętrowych bardzo ważne jest, aby pamiętać, że:

Kreska ułamkowa zastępuje znak dzielenia

Również istotne jest aby wiedzieć, która kreska ułamkowa jest główna.

Przykładowo, jeśli w ułamku główną kreską ułamkową jest dolna kreska, to działanie to można zapisać jako :4=. Lecz jeśli główną kreską ułamkową jest górna kreska, to działanie to można zapisać jako 2:=1.

Przykłady upraszczania ułamków piętrowych:

Zadania

1. Oblicz:



2. Uzupełnij:

3. …
4. …=

3. W pewnej firmie pracują 504 osoby. Spośród nich posiada wykształcenie wyższe. Wśród nich zajmuje się naukami ścisłymi. z nich pracuje przy komputerze, a reszty to naukowcy. Ilu naukowców jest zatrudnionych w tej firmie?

Rozwiązania

**1.** a) b) c) d) e)()()

**2.** a) b) c) d)

**3.** Liczba pracowników firmy: 504

Liczba osób z wykształceniem wyższym: 504 = 168

Liczba osób zajmujących się naukami ścisłymi: 168 = 126

Liczba osób pracujących przy komputerze: 126 = 42

Liczba naukowców: (126 – 42) = 84 = 24

Odp.: W firmie pracuje 24 naukowców.